Reinhard Volmer

Bilder vom Chaos – berechnete Fraktale

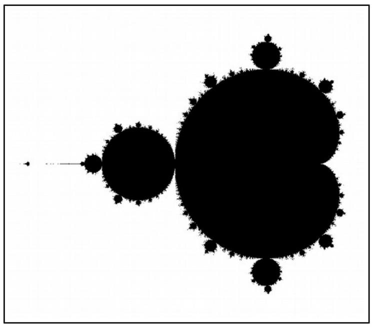
Bekanntlich hat die Gleichung $x^2 = -1$ innerhalb der reellen Zahlen keine Lösung, denn reelle Quadrate können nicht kleiner als Null sein. Um auch solche Gleichungen lösbar zu machen, führt man zusätzlich zunächst die Zahl $i = \sqrt{-1}$ ein. Man bildet eine neue Zahlenachse, die imaginären Zahlen, die senkrecht auf der Geraden der reellen Zahlen steht. Auf dieser Achse wird als Einheit die Zahl **i** verwendet. Es entsteht eine Fläche, die Punkte auf dieser Fläche sind die komplexen Zahlen. Eine solche Zahl kann man mit **z** bezeichnen, diese Zahl setzt sich dann aus einem reellen Teil **x** und einem imaginären Anteil **y** zusammen.

Mit diesen Zahlen kann man ähnlich rechnen, wie mit den reellen Zahlen, man muss dazu nur einige zusätzliche Regeln einführen, die verträglich sind mit den Rechenregeln der reellen Zahlen. Rechteckige Ausschnitte aus dieser Fläche eignen sich wunderbar als Bildflächen.

Chaotische Strukturen entstehen durch wiederholte Anwendung nichtlinearer Operationen.

Durch einem Iterationsprozess wird eine Folge von komplexen Zahlen definiert, wobei die jeweils nächste Zahl z_{n+1} durch eine Rechenvorschrift aus der jeweils vorherigen Zahl z_n ermittelt wird. Der Startwert z_0 wird am Anfang fest vorgegeben. In der Regel ist das der Nullpunkt. Es ist interessant, den Weg der Folge auf der Ebene der komplexen Zahlen zu verfolgen. Entweder verbleiben die Punkte innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, oder sie wandern ohne Grenze immer weiter hinaus.

Ein nichtlinearer Iterationsprozess wird z.B. durch $z_{n+1} = z_n^2 + c$ definiert. Als Anfangswert wird $z_0=0$ gesetzt. Es wird ein Punkt **c** aus der komplexen Zahlenebene ausgesucht, und für dieses **c** wird die Folge z_n nach und nach berechnet. Für $c=0$ verbleibt die Folge immer bei $z_n=0$, für $c=1$ hingegen bleibt die Folge zwar auf der reellen Zahlengeraden, wächst aber mit **1, 2, 5, 26, 677…** schnell über alle Grenzen. Für manche Ausgangspunkte **c** verbleiben die Elemente der Folge innerhalb eines festgelegten Kreises um den Nullpunkt, für andere nicht. Je nach diesem Verhalten der Folge kann man den Punkt **c** auf der Ebene schwarz oder weiß einfärben. Berechnet man Folgen für jeden Punkt **c** der Ebene, so erhält man (natürlich beschränkt auf die verfügbaren Pixel unseres Bildausschnittes) die folgende Darstellung:



Apfelmännchen

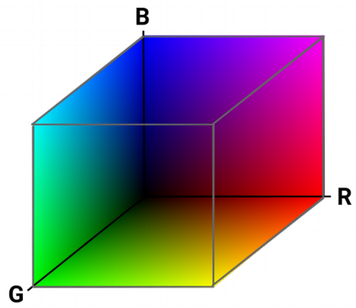
Das jetzt weiß eingefärbte Gebiet kann noch farblich differenziert werden nach der Nummer **n** des Elementes der Folge, das einen festgelegten Kreis um den Nullpunkt als erstes verlässt. Die schwarze Menge wird nach dem französischen Mathematiker Benoît B. Mandelbrot, der über Chaos und Fraktale geforscht hat, „Mandelbrot-Menge“ genannt. Es handelt sich hier um eine deterministisch chaotische Menge, da alle Berechnungen von festen Startbedingungen ausgehen und der Zufall keine Rolle spielt. Die Gestalt dieser Menge, die auch „Apfelmännchen“ genannt wird, kommt an ihrem Rand als Knospe in unendlich häufigen ähnlichen Wiederholungen vor. Strukturen, die aus unendlich vielen kleineren Kopien ihrer selbst bestehen, nennt man auch Fraktale, sie weisen Formen der Selbstähnlichkeit auf. Lineare Iterationsfunktionen führen nicht zu fraktalen Strukturen.

Normalerweise werden für die Iterationsvorschrift „gutartige“ Funktionen verwendet, die komplex differenzierbar sind. Im Beispiel oben ist das die Funktion **$f(z) = z^2$** . In der Mathematik werden solche Funktionen holomorph oder analytisch oder regulär genannt, sie müssen bestimmte Bedingungen erfüllen.

Ich habe nun ein Programm erstellt, das es mir erlaubt, auch andere Funktionen für die Iterationsvorschrift zu verwenden. Dazu gebe ich den Realteil und den Imaginärteil der Funktion getrennt vor. Hier kann man dann auch nicht differenzierbare Funktionen und sogar unstetige Funktionen einsetzen. Dadurch kann man Bilder erzeugen, die noch „chaotischer“ als die normalen Fraktale sind.

Wie komme ich zu den Bildern? Zunächst probiere ich willkürlich einige einfache Iterationsformeln aus. „Einfach“ heißt, es kommen nur die vier Grundrechenarten vor, mit denen der Realteil x und der Imaginärteil y verknüpft werden. Das Bild wird dann zunächst im Bereich jeweils für x und y von -10 bis +10 berechnet. Die Anzahlen der benötigten Iterationsschritte werden dann standardmäßig in den brillanten Regenbogenfarben dargestellt. Ich kann dann schauen, wo es interessante Gegenden gibt und von denen eine Auszugsvergrößerung machen. Die Farben kann man dann ändern, indem man einen eventuell sehr krummen Weg durch den RGB-Farbenraum vorgibt, auch mit mathematischen Funktionen.

Wenn diese Bilder zu langweilig werden, kann man noch trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus, Tangens etc.) verwenden, auch die Exponentialfunktion oder den Logarithmus. Richtig interessant wird es, wenn man noch abwegigere Funktionen einsetzt, wie zum Beispiel den absoluten Betrag oder die unstetige Sprungfunktion. Diese ist für negative x null und für positive x eins. Durch Ineinandersetzen dieser Funktionen gibt es eine unbeschreiblich große Menge von Möglichkeiten. Bei der Auswahl muss man etwas Glück haben und die interessanten Gebiete erahnen. Manchmal ergeben sich besondere Strukturen erst bei riesiger Vergrößerung.



RGB-Farbenraum

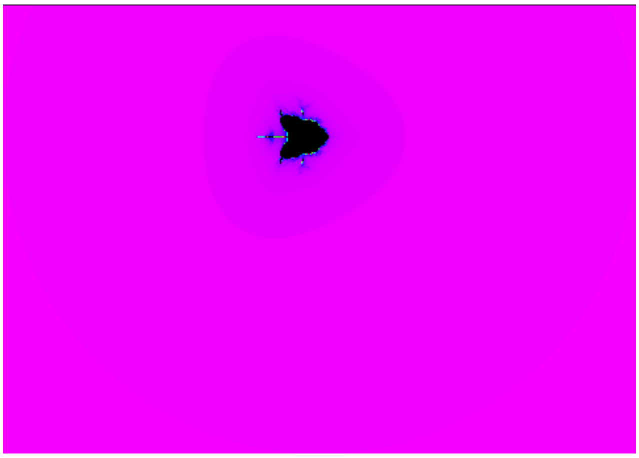
Hier ein Beispiel, wie in verschiedenen Schritten ein Fraktalbild entstanden ist:

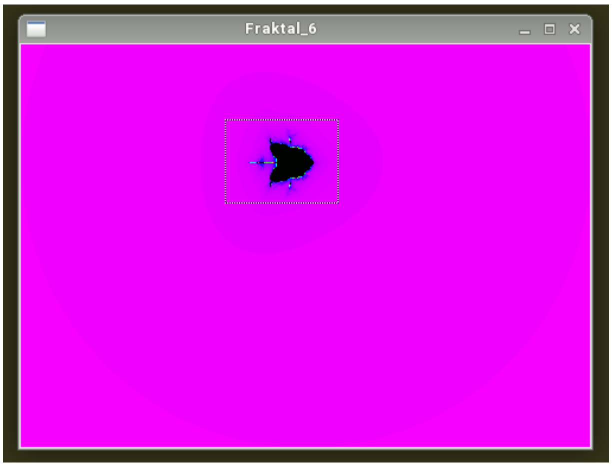
Als Iterationsformeln werden die Funktionen gewählt:

Für den Realteil: f(x,y) = x*x-y*y
Für den Imaginärteil: f(x,y) = 2*x*y+y

Um feststellen zu können, ob die jeweilige Folge in einem festgelegten Kreis verbleibt oder nicht, wird die Iterationszahl 200 festgesetzt. Das bedeutet in diesem Beispiel, wenn nach 200 Schritten der Kreis mit dem Radius 10 noch nicht überschritten ist, wird angenommen, dass die Folge **z_n** beschränkt bleibt. Die zugehörigen Ausgangspunkte werden schwarz gefärbt. Die anderen Punkte werden je nach Zahl der Schritte, bei denen die Kreisgrenze zum ersten Mal überschritten wird, unterschiedlich gefärbt. Zunächst in Form von Regenbogenfarben auf dem äußeren Rand des oben abgebildeten RGB-Farbenraumes.

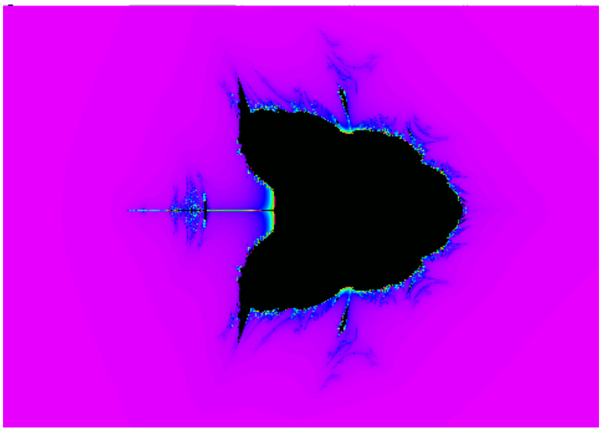
Für die Bildbreite von 480 Pixeln und die Bildhoehe von 340 Pixeln wird der reelle Ausschnitt der Variablen x von -10 bis +10, der imaginäre Ausschnitt der Variablen y von -10 bis +4,17 gewählt.

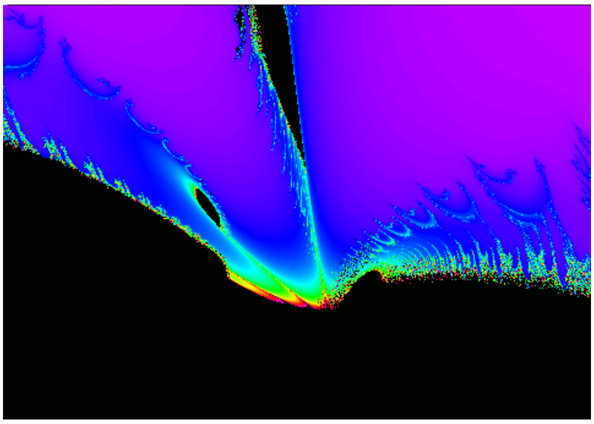




Stadium 1: gesamtes Bild

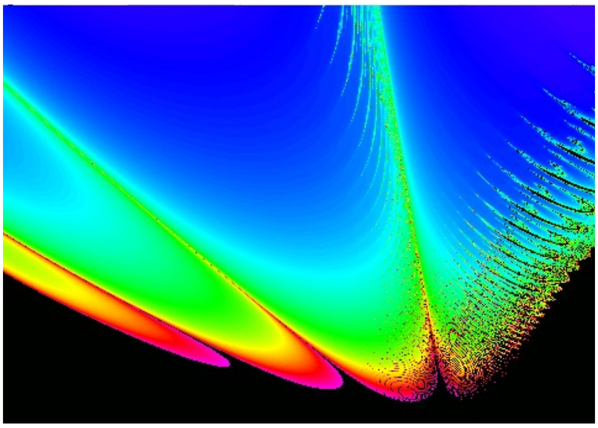
Stadium 2: Ein Ausschnitt wird gewählt

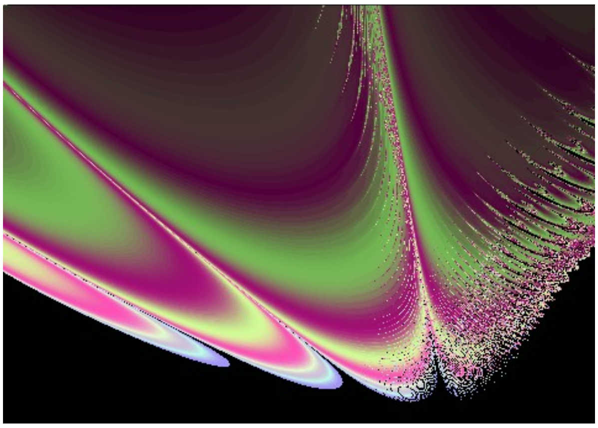




Stadium 3: Ausschnitt

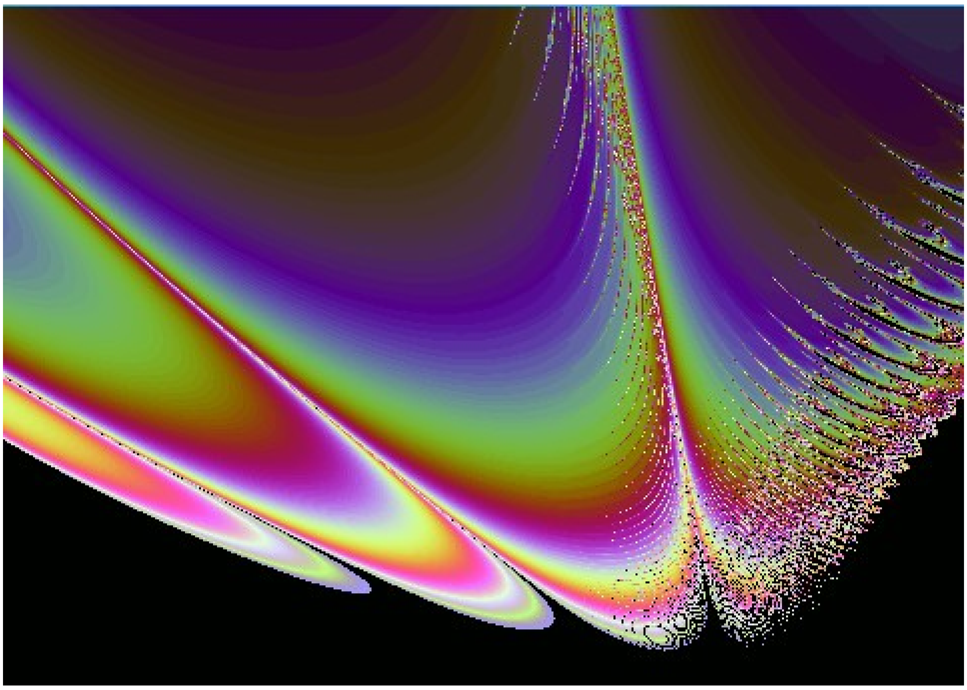
Stadium 4: Kleinerer Ausschnitt





Stadium 5: Weitere Vergrößerung

Stadium 6: Andere Farben



Endstadium: Endgültige Farbauswahl

Für das endgültige Bild wurde die 100-fache Auflösung berechnet und gespeichert. Es wurde nach den folgenden Iterationsfunktionen berechnet:

	Realteil	Imaginärteil
Röhren im Zerfall	x*x-y*y	2*x*y+y

Lerchenweg 7
D-59394 Nordkirchen